



## 1. MANUAL DE LA HERRAMIENTA 2S-PORCH

### 1.1 INTRODUCCIÓN

Antes de empezar a utilizar esta herramienta es necesario que se haya leído el tutorial de la herramienta SDOF-Dynamics <sup>(1)</sup>. Y si no se lo hace aún se pide al lector que se moleste en leerlo. Ya que el presente tutorial esta complementado por aquel. Buscar en [www.utpl.edu.ec/VLEE](http://www.utpl.edu.ec/VLEE). Sección Simulación-Dinámica de estructuras.

Al hablar de sistemas de dos grados de libertad nos estamos refiriendo ya a la utilización de conceptos de sistemas de múltiples grados de libertad. Por eso se ha creído conveniente hacer un breve recuento de ciertos conceptos que ayudarán a una mejor comprensión del uso que se les puede dar a las herramientas.

### 1.2 SISTEMA SIMPLE: PÓRTICO DE DOS PISOS

Se formula la ecuación de movimiento más simple posible que corresponde a un sistema de múltiples grados de libertad (MDOF) se ha idealizado un pórtico de dos pisos sujeto a fuerzas externas  $p_1(t)$  y  $p_2(t)$ . En este sistema las vigas y pisos son rígidos (rigidez infinita) a flexión, y varios factores son ignorados: la deformación axial de las vigas y las columnas, además el efecto de la fuerza axial en la rigidez de las columnas. Esta idealización de un pórtico, aunque no es real, es conveniente para ilustrar el desarrollo de la ecuación de movimiento de un sistema de MDOF

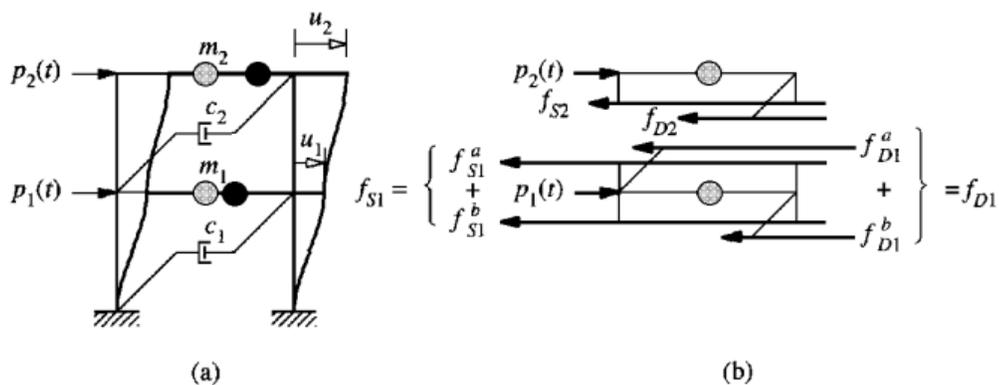


Fig.1.2.1 (a) Pórtico de dos pisos (b) Fuerzas que actúan en las dos masas

Estas masas están distribuidas en todo el pórtico, pero se las idealizará como si estuvieran concentradas en cada nivel. Esta suposición es generalmente para edificios de múltiples



pisos porque la mayoría de la masa de los edificios esta efectivamente en los niveles de cada piso.

Justamente como en el caso de un sistema SDOF (Capítulo III), se asumirá que un mecanismo de amortiguamiento viscoso lineal representa la disipación de energía en una estructura. La disipación de energía está asociada con los movimientos deformacionales de cada piso, los amortiguadores viscosos pueden ser visualizados como se mostró.

El número de desplazamientos requerido para definir las posiciones de desplazamiento de todas las masas relativas a su posición de equilibrio original, es denominado como el número de grados de libertad (Capitulo II - Sec. 2.2). El pórtico de la Fig.4.2.1a, con las masas concentradas a nivel de cada piso, tiene dos grados de de libertad **2DOF**: los desplazamientos laterales  $u_1$  y  $u_2$  de los dos pisos en la dirección del eje x.

### 1.2.1 Usando la segunda ley de movimiento de Newton

Las fuerzas que están actuando en las masas  $m_j$  de cada piso se ven en la Fig. 1.2.1b. Esta incluye la fuerza externa  $p_j(t)$ , la fuerza resistiva  $f_{sj}$  elástica (o inelástica), y la fuerza de amortiguamiento  $f_{Dj}$ . La fuerza externa es tomada como positiva a lo largo de la dirección del eje x positivo. La fuerza elástica y de amortiguamiento como se mostró actúan en la dirección opuesta porque estas son las fuerzas internas que resisten los movimientos. La segunda ley de movimiento de Newton entonces dada para cada masa:

$$p_j - f_{sj} - f_{Dj} = m_j \ddot{u}_j \quad \text{o} \quad m_j \ddot{u}_j + f_{Dj} + f_{sj} = p_j \quad (1.2.1)$$

La ecuación (4.2.1) contiene dos ecuaciones para  $j = 1$  y  $2$ , y escritas también en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \quad (1.2.2)$$

La ecuación (4.2.2) puede ser rescrita como:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_s = \mathbf{p}(t) \quad (1.2.3)$$

Introduciendo la siguiente notación:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_D = \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f}_s = \begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

Donde  $\mathbf{m}$  es la



matriz de masas del pórtico de dos pisos.

Asumiendo un comportamiento lineal, las fuerzas resistivas elásticas  $\mathbf{f}_s$  están relacionadas a los desplazamientos de los pisos  $\mathbf{u}$ . Para este propósito se introduce la rigidez lateral  $k_j$  del  $j$ -ésimo piso; esto relaciona al cortante de piso  $V_j$  con la deformación del piso o deriva,  $\Delta_j = u_j - u_{j-1}$ , con la siguiente ecuación:

$$V_j = k_j \Delta_j \quad (1.2.4)$$

La rigidez de piso es la suma de las rigideces laterales de todas las columnas en el piso correspondiente. Para un piso de altura  $h$  y una columna con módulo de elasticidad  $E$ , y segundo momento de área  $I_c$ , la rigidez lateral de una columna con los extremos restringidos o empotrados implicadas por la idealización del pórtico, es  $12EI_c/h^3$ . Por ello la rigidez de piso es:

$$k_j = \sum_{\text{columnas}} \frac{12EI_c}{h^3} \quad (1.2.5)$$

Con las rigideces de piso definidas, se puede relacionar las fuerzas resistivas elásticas  $f_{s1}$  y  $f_{s2}$  con los desplazamientos de piso,  $u_1$  y  $u_2$ . La fuerza  $f_{s1}$  en el primer piso está conformada por dos contribuciones:  $f_{s1}^a$  del piso que esta encima, y  $f_{s1}^b$  del piso que está debajo. De este modo:

$$f_{s1} = f_{s1}^b + f_{s1}^a$$

La cual después de sustituir en la ecuación (4.2.4) y notar que  $\Delta_1 = u_1$  y  $\Delta_2 = u_2 - u_1$ , se llega a:

$$f_{s1} = k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2) \quad (1.2.6a)$$

La fuerza  $f_{s2}$  en el segundo piso es:

$$f_{s2} = k_2 (u_2 - u_1) \quad (1.2.6b)$$

Se observa que  $f_{s1}^a$  y  $f_{s2}$  es igual en magnitud y en dirección opuesta porque las dos representan el cortante en el segundo piso. En forma matricial las ecuaciones (1.2.6a) y (1.2.6b) son:

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad \mathbf{f}_s = \mathbf{ku} \quad (1.2.7)$$



Así el vector de fuerza elástica resistiva  $\mathbf{f}_s$  y el vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$  está relacionado a través de la *matriz de rigidez*  $\mathbf{k}$  para el pórtico de dos pisos.

Las fuerzas de amortiguamiento  $f_{D1}$  y  $f_{D2}$ , están relacionadas con las velocidades  $\dot{u}_1$  y  $\dot{u}_2$  de los pisos. El coeficiente de amortiguamiento  $c_j$  del j-ésimo piso relaciona al cortante de piso  $V_j$  debido a los efectos de amortiguamiento en la velocidad  $\dot{\Delta}$  asociada con la deformación de piso por:

$$V_j = c_j \dot{\Delta}_j \quad (1.2.8)$$

De manera similar a la ecuación (4.2.6), se puede deducir

$$f_{D1} = c_1 \dot{u}_1 + c_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \quad f_{D2} = c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \quad (1.2.9)$$

En forma matricial la ecuación (4.2.9) es

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad \mathbf{f}_D = \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} \quad (1.2.10)$$

El vector de fuerza  $f_D$  de amortiguamiento resistivo y el vector de velocidad  $\dot{\mathbf{u}}$  están relacionados a través de la *matriz de amortiguamiento*  $\mathbf{c}$  para el pórtico de dos pisos.

Ahora sustituyendo las ecuaciones (1.2.7) y (1.2.10) en (1.2.3) se obtiene,

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \quad (1.2.11)$$

La ecuación matricial representa dos ecuaciones diferenciales ordinarias que gobiernan los desplazamientos  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  del marco de dos pisos sujeto a fuerzas dinámicas externas  $p_1(t)$  y  $p_2(t)$ . Cada ecuación contiene dos incógnitas  $u_1$  y  $u_2$ . Las dos ecuaciones están por lo tanto unidas en esa forma presentada, deben ser resueltas simultáneamente.

### 1.2.2 Equilibrio dinámico

De acuerdo al principio de D'Alembert, con las fuerzas de inercia incluidas, un sistema dinámico está en equilibrio en cada instante de tiempo. Para las dos masas en el sistema de la Fig.1.2.1a y Fig.1.2.2 vistas en su diagrama de cuerpo libre, incluyendo las fuerzas de inercia. Cada fuerza de inercia es igual al producto de las masas por la aceleración en su respectivo tiempo y actuando en dirección opuesta de la aceleración. De los diagramas de cuerpo libre la condición de equilibrio dinámico también está dada por la ecuación (1.2.11).

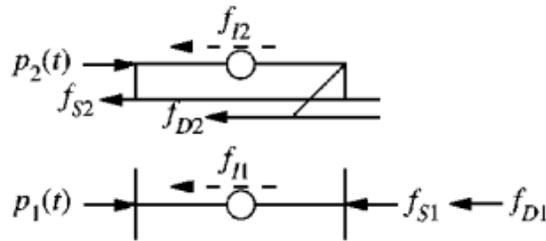


Fig.1.2.2 Diagramas de cuerpo libre

Las deducciones mostradas anteriormente fueron interpretadas del libro ref. <sup>(2)</sup> Capitulo 9 Pág. 313-316. Cabe recalcar que el libro trata más a detalle el desarrollo de un sinnúmero de conceptos.

### 1.3 RAYLEIGH DAMPING

Considerando primeramente el amortiguamiento proporcional a la masa y el amortiguamiento proporcional a la rigidez:

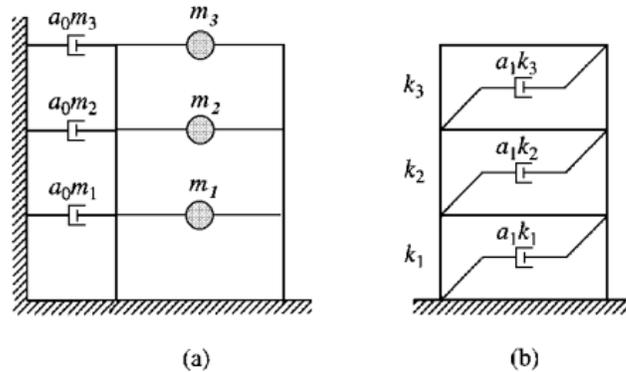
$$\mathbf{c} = a_0 \mathbf{m} \text{ y } \mathbf{c} = a_1 \mathbf{k} \quad (1.3.1)$$

$$\mathbf{C} = \Phi^T \mathbf{c} \Phi \quad (1.3.2)$$

Los modos naturales corresponden a las frecuencias naturales y pueden ser mostrados para satisfacer las siguientes condiciones de de ortogonalidad. Cuando  $\omega_n \neq \omega_r$ ,

$$\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r = 0 \quad \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r = 0 \quad (1.3.3)$$

Donde las constantes  $a_0$  y  $a_1$  tienen unidades de  $\text{seg.}^{-1}$  y  $\text{seg.}$ , respectivamente. Para las dos matrices de amortiguamiento  $\mathbf{C}$  de la ecuación (1.3.2) es diagonal en virtud de las propiedades de ortogonalidad de la ecuación (1.3.3), por lo tanto estas son las matrices clásicas de amortiguamiento. Físicamente estas representan el modelo de amortiguamiento mostrado en la Fig. 4.3.1 para un pórtico de múltiples pisos. El amortiguamiento proporcional a la rigidez es deducido intuitivamente ya que este puede ser interpretado como un modelo de disipación de energía que surge de las deformaciones de piso, en contraste al amortiguamiento proporcional a la masa. Esto es difícil de justificar físicamente porque el amortiguador de aire de este puede ser interpretado que para el modelo es insignificamente pequeño para la mayoría de las estructuras.



**Fig.1.3.1** (a) Amortiguamiento proporcional a la masa; (b) amortiguamiento proporcional a la rigidez

Luego se verá que, por ello mismo, ninguno de los dos modelos de amortiguamientos es apropiado para la aplicación práctica.

$$C_n = \phi_n^T c \phi_n \quad (1.3.4)$$

Relacionando ahora las ecuaciones de amortiguamiento modal para un sistema con amortiguamiento proporcional a la masa con el coeficiente  $a_0$ . El amortiguamiento generalizado para el  $n$ -ésimo modo, ecuación (4.3.4), es

$$C_n = a_0 M_n \quad (1.3.5)$$

y la relación de amortiguamiento modal, es

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} \quad (1.3.6)$$

La relación de amortiguamiento es inversamente proporcional a la frecuencia natural (1.3.1a). El coeficiente  $a_0$  puede ser seleccionado para obtener un valor específico de relación de amortiguamiento  $\zeta$ , de algún modo, es decir  $\zeta_i$  para el  $i$ -ésimo modo. Luego la ecuación (1.3.6) está dada por

$$a_0 = 2\zeta_i \omega_i \quad (1.3.7)$$

Con  $a_0$  determinado, la matriz de amortiguamiento  $c$  es encontrada de la ecuación (1.3.1a), y la relación de amortiguamiento en algún otro modo, es decir en el  $n$ -ésimo modo, es dada por la ecuación (1.3.6).

Igualmente, las relaciones de amortiguamiento modal para un sistema con amortiguamiento proporcional a la rigidez pueden ser relacionadas con el coeficiente  $a_1$ . En este caso

$$C_n = a_1 \omega_n M_n \quad \text{y} \quad \zeta_n = \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (1.3.8)$$

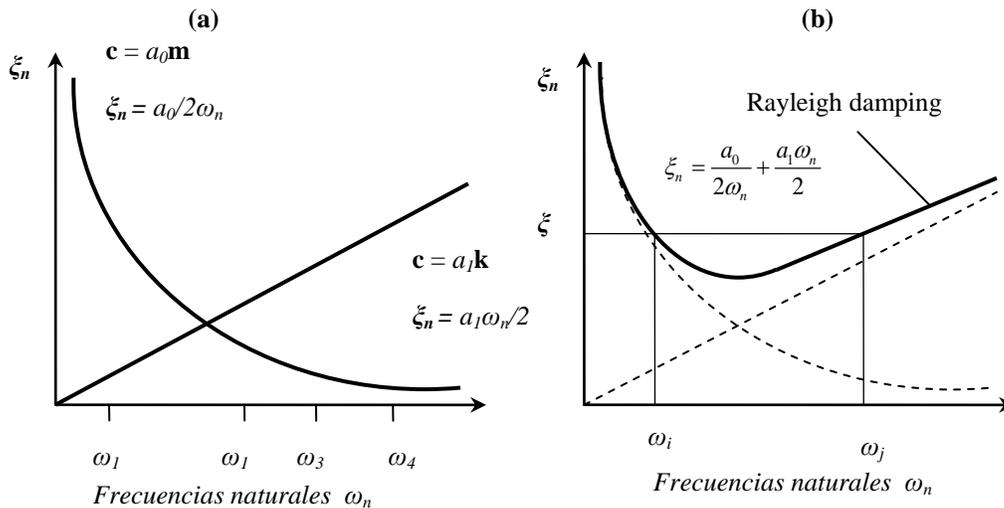


En donde es usada la siguiente ecuación:

$$k\phi_n = \omega_n^2 m\phi_n \quad (1.3.9)$$

La relación de amortiguamiento se incrementa linealmente con la frecuencia natural (Fig.1.3.1a). El coeficiente  $a_1$  puede ser seleccionado para obtener un valor específico de relación de amortiguamiento en algún modo, es decir  $\xi_j$  para el  $j$ -ésimo modo. Luego la ecuación (1.3.8b) está dada por

$$a_1 = \frac{2\xi_j}{\omega_j} \quad (1.3.10)$$



**Fig.1.3.2** Variación de la relación de amortiguamiento modal con la frecuencia natural: (a) Amortiguamiento proporcional a la masa y amortiguamiento proporcional a la rigidez (b) Rayleigh Damping

Con  $a_1$  determinado, la matriz de amortiguamiento es encontrada de la ecuación (1.3.1b), y la relación de amortiguamiento en algún otro modo es dado por la ecuación (1.3.8b). Ninguna de las matrices de amortiguamiento definidas por la ecuación (1.3.1) son apropiadas para el análisis práctico de sistemas de MDOF. Las variaciones de la relación de amortiguamiento modal con la frecuencia natural presentadas en la Fig.1.3.2a no son consistentes con los datos experimentales que se indican a relaciones de amortiguamiento aproximadamente similares para varios modos de vibración de una estructura.

Como un primer paso hacia una matriz clásica de amortiguamiento consistente con datos experimentales, se considera el *Rayleigh Damping*:



$$\mathbf{c} = a_0 \mathbf{m} + a_1 \mathbf{k} \quad (1.3.11)$$

La relación de amortiguamiento para el n-ésimo modo para un sistema es:

$$\xi_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (1.3.12)$$

Los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  pueden ser determinados de las relaciones de amortiguamiento especificadas  $\xi_i$  y  $\xi_j$  para los  $i$ -ésimos y  $j$ -ésimos modos, respectivamente. Expresando la ecuación (1.3.12) para estos dos modos en forma de matriz expresada como

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_i & \omega_i \\ 1/\omega_j & \omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_j \end{Bmatrix} \quad (1.3.13)$$

Estas dos ecuaciones algebraicas pueden ser resueltas para determinar los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$ . Si el par de modos son asumidos para tener relaciones de amortiguamiento  $\xi$  similares, lo cual es razonable basado en datos experimentales, por lo tanto

$$a_0 = \xi \frac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad a_1 = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (1.3.14)$$

La matriz de amortiguamiento es luego encontrada de la ecuación (1.3.11) y la relación de amortiguamiento para algún otro modo, está dada por la ecuación (1.3.12) que varía con la frecuencia natural como se mostró en la Fig.1.3.2b.

En el libro del cual fue traducido este método de amortiguamiento Anil K. Chopra <sup>(2)</sup> Rayleigh más conocido como Rayleigh Damping en la página 420, podemos encontrar un ejemplo. Y además más detallado lo indicado anteriormente.

## 1.4 UTILIZACIÓN DE LA HERRAMIENTA

### 1.4.1 Breve descripción de la herramienta

Se trata de un pórtico de dos pisos, que puede ser modelado como un sistema de dos grados de libertad. Teniendo la opción de tres tipos de material y cuatro tipos de excitación. Esta estructura utiliza un amortiguamiento modal por el método Rayleigh Damping. Y del cual se muestra un esquema, a continuación:

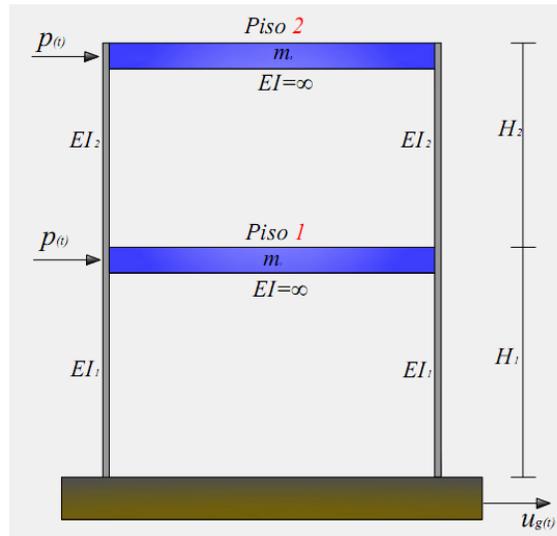


Fig.1.4.1 Esquema principal de la herramienta 2S-Porch

### 1.4.2 Ejercicio

**Ejercicio 1.4.1.-** Modelar el pórtico de dos pisos. Las masa para cada piso son de 10 tonne (1 tonne =1000 kg) y la separación entre pisos de 1 m. Rigidez  $EI = 1000 \text{ kN.m}^2$  para cada piso. Considerar para los dos modos de vibración un amortiguamiento de 5 %. El material elástico y someterlo a este a una excitación lineal, con impulso 11 kN/s a 10 segundos. Analizar para 20 segundos.

**Solución:**

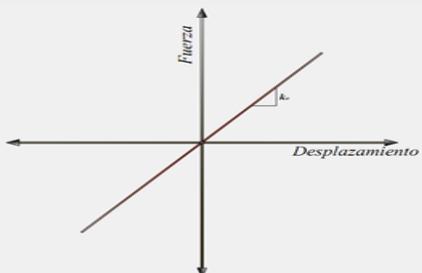
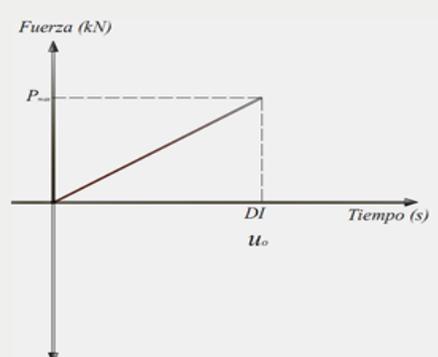
LABORATORIO VIRTUAL DE INGENIERÍA SÍSMICA

2S-Porch

ANÁLISIS DINÁMICO DE UN PORTICO DE DOS PISOS

PROPIEDADES DEL SISTEMA		ESQUEMA	
<b>Piso 1</b>	<b>Piso 2</b>		
m = <input type="text" value="20"/>	<input type="text" value="20"/>		Mass [Tonne = kN.s <sup>2</sup> /m = kN/g]
H = <input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="1"/>		Altura entre pisos [m]
EI = <input type="text" value="1000"/>	<input type="text" value="1000"/>		Rigidez [kN.m <sup>2</sup> ]
<b>Definir vibración:</b>			
$\xi =$ <input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="5"/>	Amortiguamiento [%]	

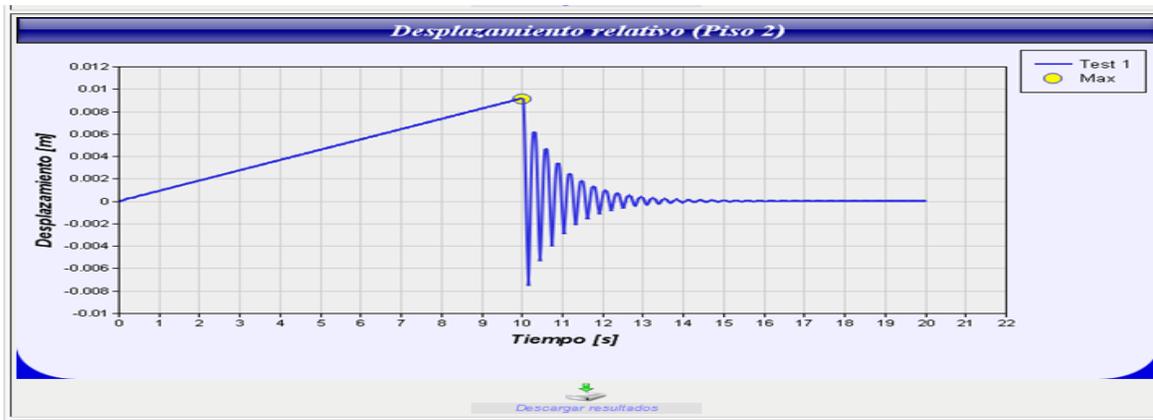


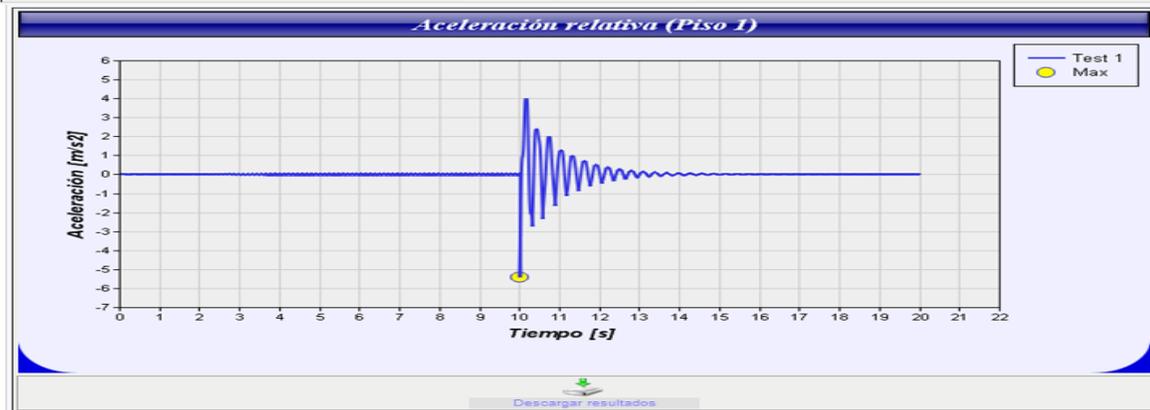
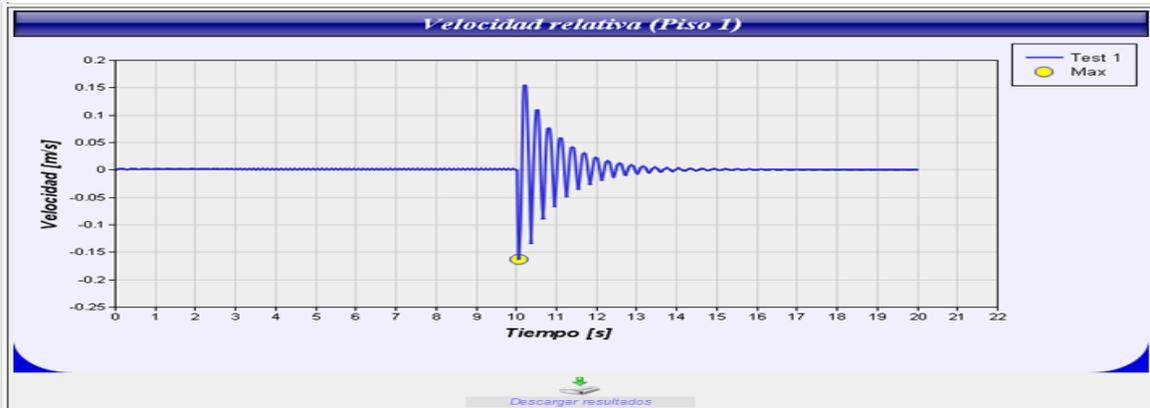
<b>TIPO DE MATERIAL</b> Seleccionar: <input type="text" value="Elástico"/>	<b>COMPORTAMIENTO TIPO</b> 
<b>TIPO DE EXITACIÓN</b> Seleccionar: <input type="text" value="Función de fuerza lineal"/>  I = <input type="text" value="11"/> Magnitud del impulso [kN/s] DI = <input type="text" value="10"/> Duración del impulso [s] <b>Pmax = (I).(DI)</b>	<b>ESQUEMA</b> 

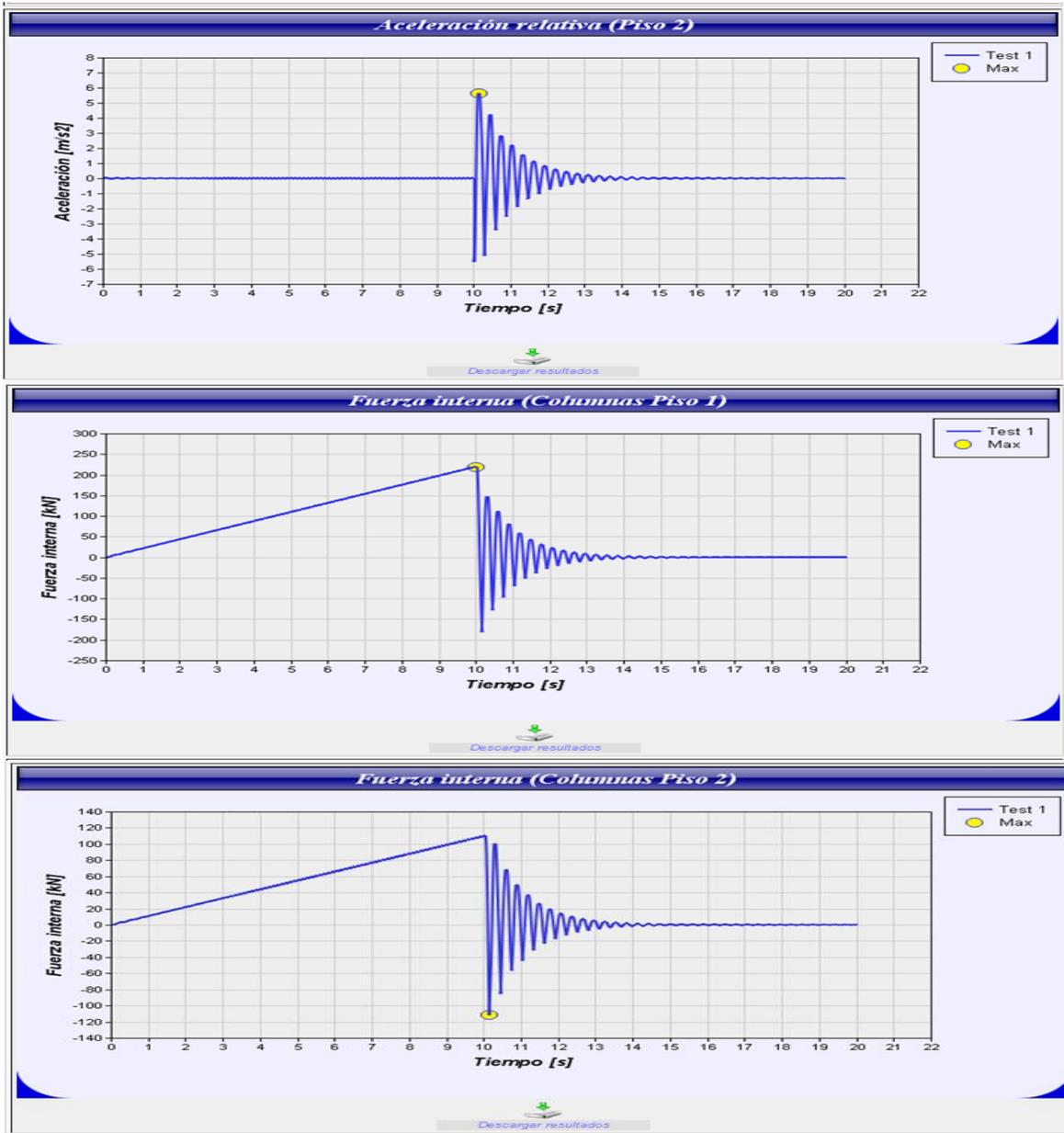
Los resultados que se obtienen:

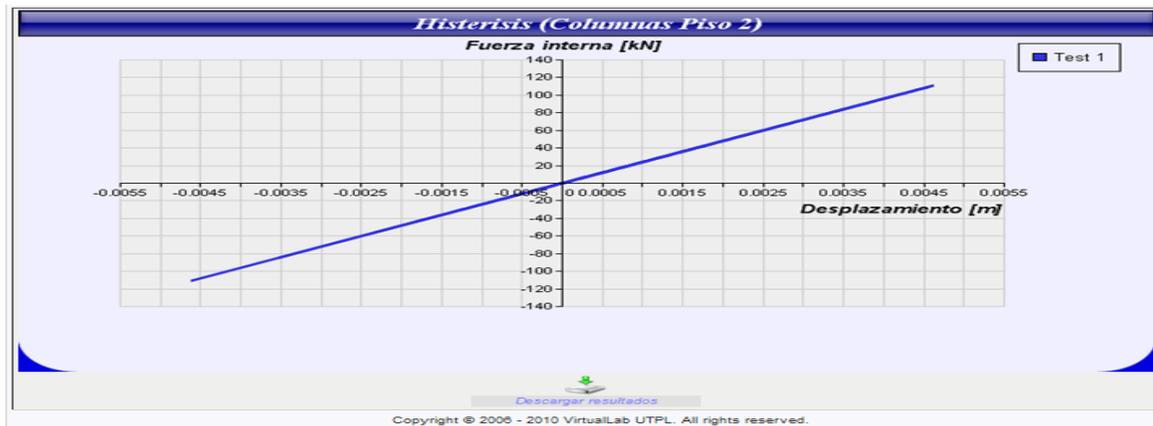
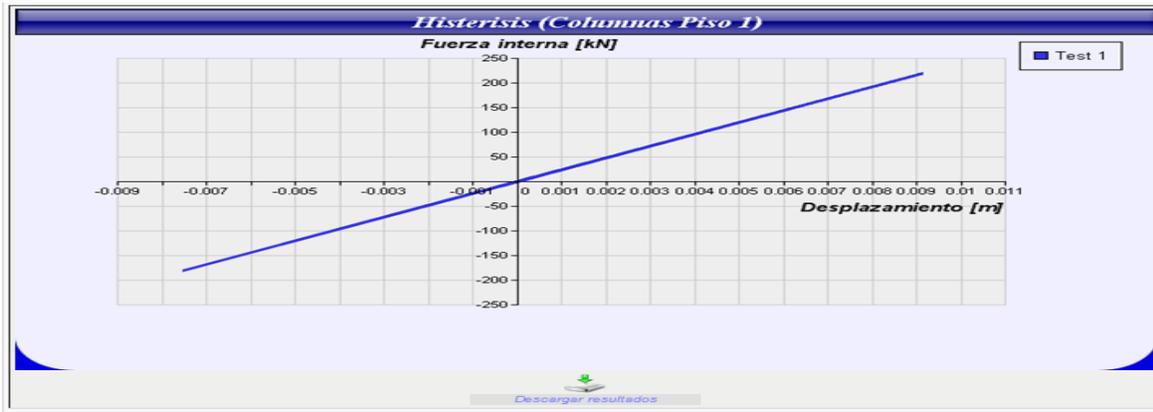
<b>ANÁLISIS</b>  Cargar ejemplo  Duración: <input type="text" value="20"/> [s]  <input type="text" value="Analizar"/>	<b>RESPUESTA MÁXIMA</b> <table border="1"><thead><tr><th></th><th>Piso 1</th><th>Piso 2</th><th></th></tr></thead><tbody><tr><td><math>u_{max}</math></td><td><input type="text" value="0.0091"/> m (10 s)</td><td><input type="text" value="0.0138"/> m (10 s)</td><td>Desplazamiento</td></tr><tr><td><math>\dot{u}_{max}</math></td><td><input type="text" value="0.1632"/> m/s (10.06 s)</td><td><input type="text" value="0.2888"/> m/s (10.07 s)</td><td>Velocidad</td></tr><tr><td><math>\ddot{u}_{max}</math></td><td><input type="text" value="5.3963"/> m/s<sup>2</sup> (10 s)</td><td><input type="text" value="5.6534"/> m/s<sup>2</sup> (10.13 s)</td><td>Aceleración</td></tr><tr><td><math>F_{max}</math></td><td><input type="text" value="219.522"/> kN (10 s)</td><td><input type="text" value="110.661"/> kN (10.13 s)</td><td>Fuerza interna</td></tr></tbody></table>  <a href="#">Descargar resultados</a>		Piso 1	Piso 2		$u_{max}$	<input type="text" value="0.0091"/> m (10 s)	<input type="text" value="0.0138"/> m (10 s)	Desplazamiento	$\dot{u}_{max}$	<input type="text" value="0.1632"/> m/s (10.06 s)	<input type="text" value="0.2888"/> m/s (10.07 s)	Velocidad	$\ddot{u}_{max}$	<input type="text" value="5.3963"/> m/s <sup>2</sup> (10 s)	<input type="text" value="5.6534"/> m/s <sup>2</sup> (10.13 s)	Aceleración	$F_{max}$	<input type="text" value="219.522"/> kN (10 s)	<input type="text" value="110.661"/> kN (10.13 s)	Fuerza interna
	Piso 1	Piso 2																			
$u_{max}$	<input type="text" value="0.0091"/> m (10 s)	<input type="text" value="0.0138"/> m (10 s)	Desplazamiento																		
$\dot{u}_{max}$	<input type="text" value="0.1632"/> m/s (10.06 s)	<input type="text" value="0.2888"/> m/s (10.07 s)	Velocidad																		
$\ddot{u}_{max}$	<input type="text" value="5.3963"/> m/s <sup>2</sup> (10 s)	<input type="text" value="5.6534"/> m/s <sup>2</sup> (10.13 s)	Aceleración																		
$F_{max}$	<input type="text" value="219.522"/> kN (10 s)	<input type="text" value="110.661"/> kN (10.13 s)	Fuerza interna																		

- Las gráficas de igual manera se muestran









### 1.4.3 Verificación

Al igual que para la herramienta 2DOF-Dynamics se ha utilizado SAP200<sup>(11)</sup> para modelar el ejercicio 1.4.1 A continuación los resultados:

Tabla 1.4.1 Cuadro comparativo de la herramienta 2S-Porch

DESPLAZAMIENTO MAXIMO (m)		
Nudo 2	Nudo 3	UTILIZANDO
0.0091	0.0138	2S-Porch
0.0092	0.0138	SAP2000



La tabla 1.4.1 afirma el correcto funcionamiento de la herramienta.

#### **REFERENCIAS**

- (1) Suarez, Vinicio, “Laboratorio Virtual de Ingeniería Sísmica LVIS, [www.utpl.edu.ec/vlee](http://www.utpl.edu.ec/vlee), (2008).
  
- (2) Chopra, Anil K., “Dynamics of Structures: theory and applications to earthquake engineering”, (1995)